

数学试卷

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 成绩 _____

考生须知	<p>1. 本试卷共 8 页，四道大题，26 道小题。其中第一大题至第三大题为必做题，满分 100 分。第四大题为附加题，满分 10 分，计入总分。考试时间 100 分钟。</p> <p>2. 在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名和学号。</p> <p>3. 答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效。</p> <p>4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。</p>
------	---

一、选择题 (每小题 2 分，共 16 分)

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 下列式子中，属于最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{4}$ B. $\sqrt{18}$ C. $-\sqrt{7}$ D. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

2. 以下列各组数为边长，能构成直角三角形的是 ()

- A. 2, 3, 4 B. 3, 6, 8 C. 5, 7, 9 D. 6, 8, 10

3. 下列计算结果正确的是 ()

- A. $\sqrt{(-3)^2} = -3$ B. $\sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$ C. $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4$ D. $\sqrt{8} \div \sqrt{\frac{1}{2}} = 2$

4. 若 $A(-1, y_1)$, $B(3, y_2)$ 是一次函数 $y = 3x + m$ 图象上的两点，则 y_1 和 y_2 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2$ B. $y_1 = y_2$ C. $y_1 > y_2$ D. 不能确定

5. 下列说法正确的是 ()

- A. 菱形的四个内角都是直角 B. 矩形的对角线互相垂直
C. 正方形的每一条对角线平分一组对角 D. 平行四边形是轴对称图形

6. 若一个正 n 边形的每个内角为 150° ，则这个正 n 边形的边数是 ()

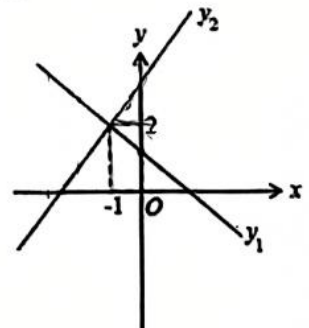
- A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

7. 如图，一次函数 $y_1 = -x + b_1$ 和 $y_2 = k_2x + b_2$ 的图象交于 $(-1, 2)$ ，

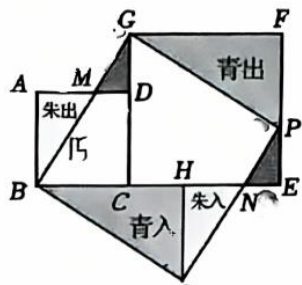
则不等式组 $k_2x + b_2 < -x + b_1 < 4$ 的解集为 ()

- A. $-1 < x < 3$ B. $-2 < x < -1$ C. $x < -1$ D. $-3 < x < -1$

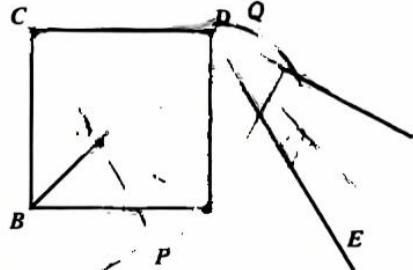
8. X 射线因其极强的穿透性被广泛用于医学 (如 CT)，工业 (如金属探伤)，治安 (如机场安检) 等领域。如图 1，将一个厚度均匀的零件 (图中阴影部分) 放置在平面直角坐标系 xOy 中。射线 $l_1: x = t (y \geq 0)$ 和射线 $l_2: y = t (x \geq 0)$ 是两条从原点开始分别沿 x 轴正半轴， y 轴正半轴匀速运动的 X 射线，其中 t 为运动时间。当 X 射线穿过零件时会发生衰减，根据衰减情况我们可以得到射线 l_1



15. 如图, 平平同学从刘徽设计的“青朱出入图”出发, 将两个边长不等的正方形纸片 $ABCD, GCEF$ 剪拼成一个大正方形纸片 $BQPG$. P, M, N 为剪痕与原正方形边的交点, 已知 $AB=12, EN=3$. 那么正方形 $BQPG$ 的边长为_____.



16. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, $\angle ADE = \alpha$, 过点 A 作 DE 的垂线, 垂足为 N , 过点 C 作 AN 的垂线, 垂足为 P , 连接 BD 交 PC 于点 M , 连接 AM , 设 $\triangle APM$ 的周长为 l , 当 $0 < \alpha \leq 60^\circ$ 时, l 的取值范围是_____.

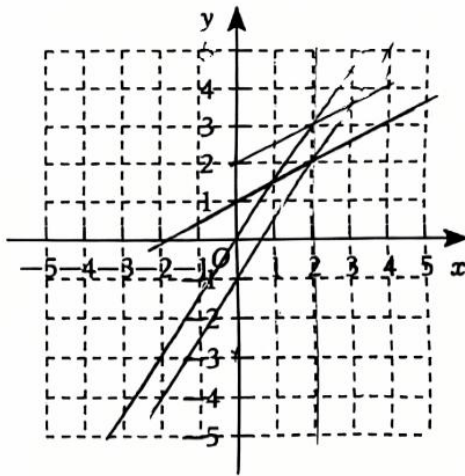


三、解答题 (共 68 分, 17、18、23 题每题 10 分, 19、21、22、24 题每题 8 分, 20 题 6 分)

17. 计算:

(1) $\sqrt{27} - \sqrt{24} \times \sqrt{\frac{1}{2}}$; (2) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

18. 一个一次函数, 当自变量 $x=1$ 时, 函数值 $y=-2$; 当 $x=2$ 时, 函数值 $y=0$.
- 求这个一次函数的解析式;
 - 在所给平面直角坐标系中画出该函数的图象, 并直接写出图象与两条坐标轴围成的三角形面积;
 - 当 $-3 < y \leq 2$ 时, 自变量 x 的取值范围是_____.



19. 下面是正正同学设计的“依据等腰三角形作菱形”的作图过程.

已知: 等腰 $\triangle ABD$ 中, $AB = AD$.

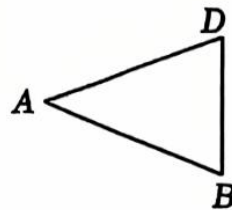
求作: 点 C , 使得四边形 $ABCD$ 为菱形.

作法: ①作 $\angle BAD$ 的角平分线 AO , 交线段 BD 于点 O ;

②以点 O 为圆心, 线段 AO 的长为半径画弧, 交线段 AO 的延长线于点 C ;

③连接 BC, DC .

点 C 即为所求.



- (1) 使用直尺和圆规, 依作法补全图形 (保留作图痕迹);
 (2) 完成下面的证明.

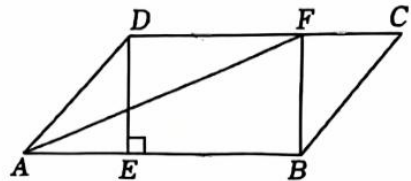
证明: $\because AB = AD$, AO 平分 $\angle BAD$,
 $\therefore BO = DO$, _____.
 $\because BO = DO$, $AO = CO$,
 \therefore 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 (_____) (填推理的依据).
 $\because AC \perp BD$,
 \therefore 四边形 $ABCD$ 为菱形 (_____) (填推理的依据).

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = kx - 1 (k \neq 0)$ 的图象经过点 $A(4, 5)$, 与过点 $(2, 0)$ 且平行于 y 轴的直线交于点 B .

- (1) 求该函数的表达式及点 B 的坐标;
 (2) 当 $x < 2$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = \frac{1}{2}x + n$ 的值大于函数 $y = kx - 1 (k \neq 0)$ 的值, 直接写出 n 的取值范围.

21. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 点 F 在边 CD 上, $DF = BE$, 连接 AF , BF .

- (1) 求证: 四边形 $BFDE$ 是矩形;
 (2) 若 $CF = 3$, $BF = 4$, $DF = 5$, 求证: AF 平分 $\angle DAB$.



22. 某外卖平台招聘外卖骑手, 并提供了如下两种日工资方案:
 方案一: 每日无底薪, 每完成一单外卖业务提成 6 元.
 方案二: 每日底薪 120 元, 外卖业务的前 30 单没有提成, 超过 30 单的部分, 每完成一单提成 10 元.

设骑手每日完成的外卖业务量为 x 单 (x 为正整数), 方案一、方案二中骑手的日工资分别为 y_1 元, y_2 元.

- (1) 直接写出 y_1 , y_2 关于 x 的函数关系式;
 (2) 小林是此外卖平台的一名骑手, 他想日工资达到 300 元, 从外卖业务量的角度考虑 (越少越好), 小林应该选择哪种方案? 说明理由.



23. 为提升学生的跳绳能力, 学校为同学们安排了“活力跳跳营”课程. 该课程分为体能提升 (不含跳绳) 和跳绳训练两个阶段: 先进行 T 天 (T 可取 0、2、4 或 6) 的体能提升, 从第 $T+1$ 天开始进入跳绳训练, 每日跳绳训练后安排课堂测试, 当跳绳的个数达到合格标准时立即停止跳绳. 体育老师根据以往经验制定的课堂测试合格标准为: 一名同学在跳绳训练的第 x 天跳绳个数为 y 个. 经统计, 对于给定的 T , 可以认为 y 是 x 的函数. 当 $T=0$ 和 $T=4$ 时, 部分数据如下:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$T=0$ 时 y 的值	30	55	75	90	100	m	107	110
$T=4$ 时 y 的值	70	120	155	170	180	185	188	190

$T=0$ 时, 从跳绳训练的第 2 日起, 合格标准中每一日比前一日多跳的跳绳个数逐渐减少或保持不变.

对于给定的 T , 在平面直角坐标系 xOy 中描出该 T 值下各有序数对 (x, y) 所对应的点, 并根据变化趋势用平滑曲线连接, 得到曲线 C_T .

当 $T=2$ 和 $T=6$ 时, 曲线 C_2, C_6 如图所示.

解答下列问题:

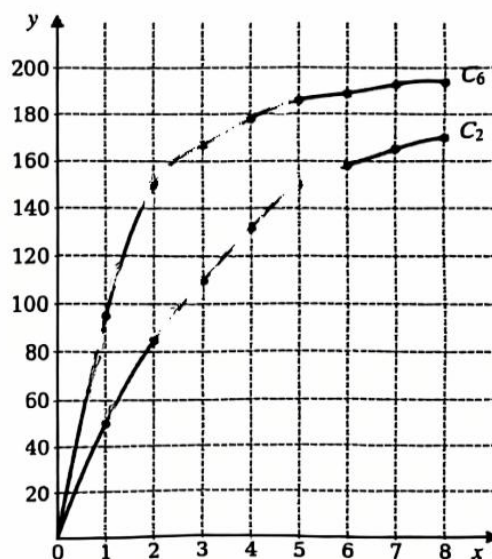
(1) 观察曲线 C_2 , 当跳绳训练天数 x 为第 _____ 天时, 当天课堂测试的跳绳合格个数首次超过 100;

(2) 表中 $m=$ _____, 并在给出的平面直角坐标系中画出 $T=4$ 时的曲线 C_4 ;

(3) 小月同学报名参加了学校的“活力跳跳营”课程.

① 若小月的目标是在课堂测试中完成跳绳个数不少于 150 个, 在 $T=0、2、4、6$ 四种训练方案中, 小月最早在参加课程 (包含体能提升和跳绳训练) 的第 _____ 天可以完成目标.

② 若课程的总天数均为 8 天, 小月应该选择安排 _____ 天的体能提升训练, 能使自己在课堂测试中的累计跳绳个数最多.



24. 已知正方形 $ABCD$ 和等腰直角三角形 AEF . 连接 CE 、 CF .

(1) 点 P 为线段 CF 的中点, 连接 DP

① 如图 1 所示, 当点 E 、 F 分别在边 AB 、 AD 上时, 请直接写出 DP 与 CE 之间的关系;

② 将 $\triangle AEF$ 绕点 A 旋转到图 2 的位置, 请写出 $\angle PDC$ 与 $\angle ACE$ 之间的数量关系并证明;

(2) 将 $\triangle AEF$ 绕点 A 旋转到图 3 的位置, 作 $FG \perp CD$ 于点 G , 设 FC 、 EC 的长分别为 m 、 n , 则 $DG \cdot DC$ 的值是_____ (用含 m 、 n 的式子表示).

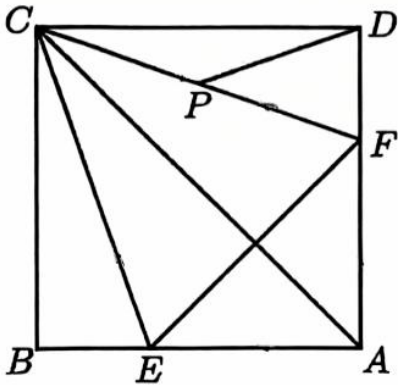


图 1

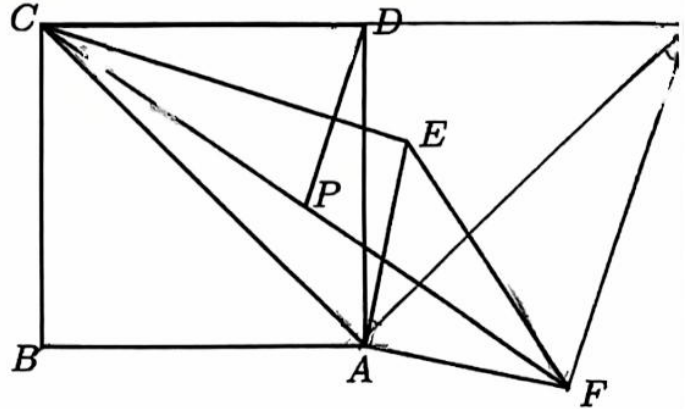


图 2

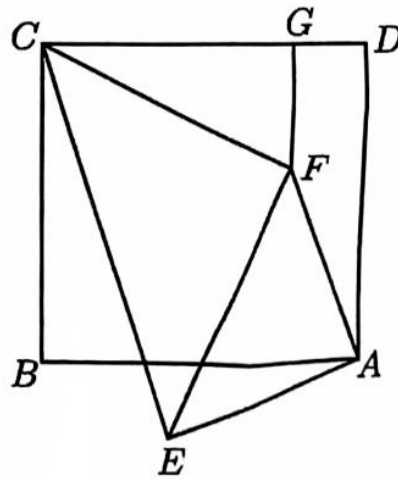


图 3



四、附加题 (共 10 分, 第 1 题 4 分, 第 2 题 6 分)

1. 阳阳发现: 利用公式 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$ 可以把一些含根号的式子写成另一个式子的平方, 如:

$$6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} = 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2.$$

【问题解决】请你仿照阳阳的方法解决下面问题:

(1) 若 $6 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6} = (1 + \sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ (a, b 为正整数), 则 $a + b =$ _____;

(2) 已知 n 为正整数, 化简 $\sqrt{n+1} + \sqrt{n^2+n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n} -$ _____;

【拓展延伸】

(3) 计算 $\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+2}} + \dots + \sqrt{\frac{\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}} + \dots + \sqrt{\frac{\sqrt{2025}+1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}}$,

请直接写出最后的化简结果.

2. 电脑屏幕上的图形是由像素组成的. 如果用放大镜观察电脑屏幕, 我们会发现: 屏幕上的图形, 实际上是由若干个小正方形拼合而成的近似图形. 据此, 小赵同学进行了如下研究:

已知 M_n 是由 $2n \times 2n$ 个边长为 1 的小正方形组成的网格 (n 为正整数). 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 W , 我们按如下规则对 M_n 进行染色: 首先将 M_n 水平放置在平面直角坐标系中, 使得它的中心点与原点重合; 此时, 如果图形 W 与某个小正方形的内部 (不含边界) 有交点, 就将这个小正方形染成黑色, 否则就将它染成白色. 我们将这样染色后的网格称为图形 W 的“ n 阶马赛克”.

例如: 图 1 和图 2 分别为函数 $y=|x|$ 的图像及其对应的“4 阶马赛克”.

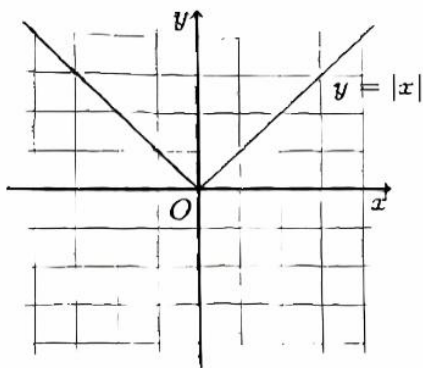


图 1

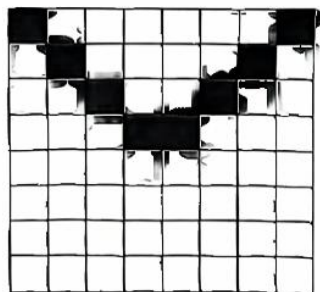
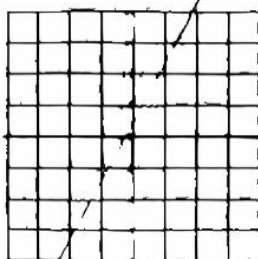


图 2



(1) 在下面的网格中画出直线 $y = 2x + \frac{1}{2}$ 的“4阶马赛克”:



(2) 对于实数 $k(k \neq 0)$, 如果存在实数 b , 使得直线 $y = kx + b$ 的“2阶马赛克”如下图所示, 则 k 的取值范围是 _____:



(3) 已知点 $P(m, \frac{1}{4})$, 直线 $l: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ 经过点 P . 点 Q 从点 P 出发沿水平方向向右移动, 过点 Q 作直线 l 的垂线, 垂足为 H . 已知当 Q 出发后, 线段 QH 的“1阶马赛克”依次如下图所示, 则 m 的取值范围是 _____.

