

2026 北京北师大实验中学初二（下）期中

数 学

一、选择题（共 24 分，每题 3 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 下列二次根式中，属于最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

B. $\sqrt{\frac{4}{9}}$

C. $\sqrt{8}$

D. $\sqrt{3}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的对边分别是 a ， b ， c ，下列条件中，不能判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是（ ）

A. $\angle A + \angle B = 90^\circ$

B. $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$

C. $a : b : c = 3 : 4 : 5$

D. $a = b = 1$ ， $c = \sqrt{2}$

3. 我国古代园林连廊常采用八角形的窗户设计，如图 1 所示，其轮廓是一个正八边形，从窗户向外观看，景色宛如镶嵌于一个画框之中．图 2 是八角形窗户的示意图，它的一个外角 $\angle 1$ 的大小为（ ）



图1

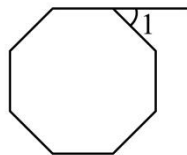


图2

A. 22.5°

B. 45°

C. 60°

D. 135°

4. 下列说法正确的是（ ）

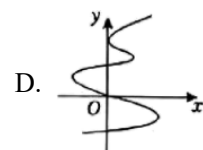
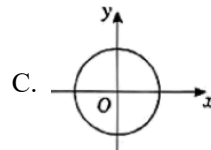
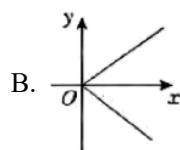
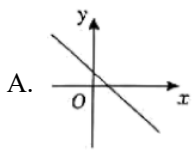
A. 菱形的四个内角都是直角

B. 矩形的对角线互相垂直

C. 正方形的每一条对角线平分一组对角

D. 平行四边形是轴对称图形

5. 下列图象中，表示 y 是 x 的函数的是（ ）



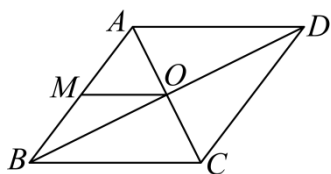
6. 已知一次函数 $y = kx + b$ （ k 、 b 是常数，且 $k \neq 0$ ）， x 与 y 的部分对应值如下表所示，那么方程

$kx = -b$ 的解是（ ）

x	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	-1	-2

- A. $x=1$ B. $x=0$ C. $y=0$ D. $y=1$

7. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线交于点 O ，点 M 为 AB 的中点，连接 OM ，若 $AC=6$ ， $BD=8$ ，则 OM 的长为（ ）



- A. $\frac{5}{2}$ B. 4 C. 5 D. $\frac{3}{2}$

8. 一个寻宝游戏的寻宝通道如图 1 所示，通道由在同一平面内的 AB, BC, CA, OA, OB, OC 组成，为记录寻宝者的行进路线，在 BC 的中点 M 处放置了一台定位仪器．设寻宝者行进的时间为 x ，寻宝者与定位仪器之间的距离为 y ，若寻宝者匀速行进，且表示 y 与 x 的函数关系的图象大致如图 2 所示，则寻宝者的行进路线可能为（ ）

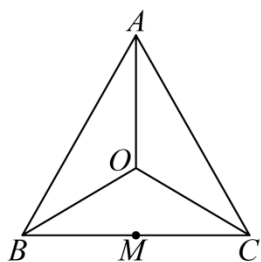


图 1

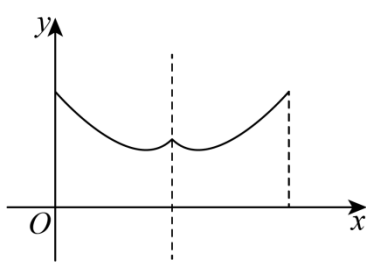


图 2

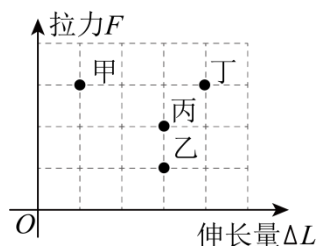
- A. $A \rightarrow O \rightarrow B$ B. $B \rightarrow A \rightarrow C$ C. $B \rightarrow O \rightarrow C$ D. $C \rightarrow M \rightarrow B$

二、填空题（共 24 分，每题 3 分）

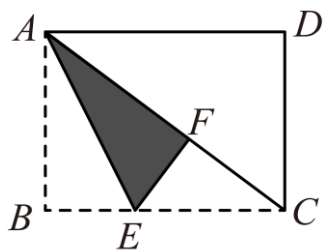
9. 若 $\frac{\sqrt{x+7}}{x-3}$ 有意义，则 x 的取值范围为_____.

10. 写出一个一次函数解析式，其图象与直线 $y=-2x$ 平行，且不经第一象限_____.

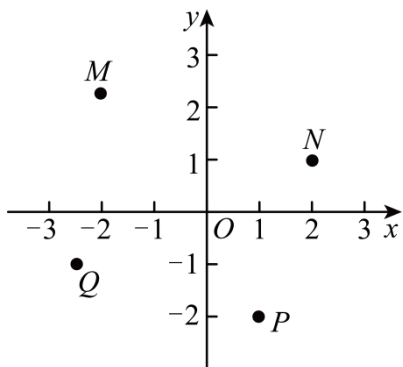
11. 我们把弹簧所受的拉力 F 与伸长量 ΔL 的比值称为弹簧的弹性系数．某学生将甲、乙、丙、丁四根弹簧（在弹性限度内）的拉力和伸长量进行测量记录，如图所示，则弹性系数最大的是_____.



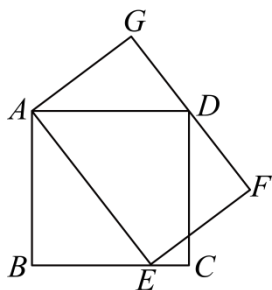
12. 如图，矩形纸片 $ABCD$ 中，已知 $AD=8$ ，点 B 落在点 F 处，折痕为 AE ， $EF=3$ ，则 AB 的长为_____.



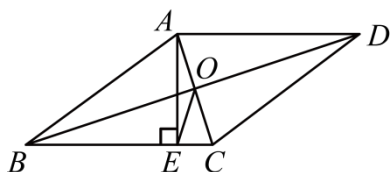
13. 如图，在点 M , N , P , Q 中，一次函数 $y = kx + 2$ ($k < 0$) 的图象不可能经过的点是_____.



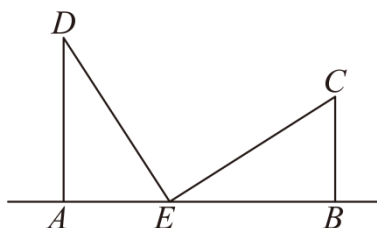
14. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2， E 为 BC 边上的一点，以 AE 为边作矩形 $AEFG$ ，使 GF 经过点 D ，则矩形 $AEFG$ 的面积为_____.



15. 如图，菱形 $ABCD$ 中， $BC = 10$ ，面积为 60，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，过点 A 作 $AE \perp BC$ ，交边 BC 于点 E ，连接 EO ，则 $EO =$ _____.



16. 如图，在笔直的公路上有相距 20km 的 A , B 两点， C , D 为两个村庄， $DA \perp AB$ ， $CB \perp AB$ ．已知 $DA = 15\text{km}$ ， $CB = 10\text{km}$ ．现要在公路的 AB 段上建一个加油站 E ，并修建直路 CE, DE ．



(1) 若 C, D 两村到加油站 E 的距离相等, 则 $AE =$ _____ km;

(2) 若再修建直路 CD , 并将 $\triangle CDE$ 规划为一块面积不小于 110km^2 也不超过 120km^2 的林场, 则 AE 的取值范围是 _____ (单位: km).

三、解答题 (共 52 分)

17. 计算:

(1) $\sqrt{48} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{12} + \sqrt{24}$;

(2) $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{5})^2$.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l_1: y = kx + b (k \neq 0)$ 经过点 $A(2, 1)$ 和 $B(-1, -2)$. 另一条直线 $y = -kx + c$ 也经过点 A .

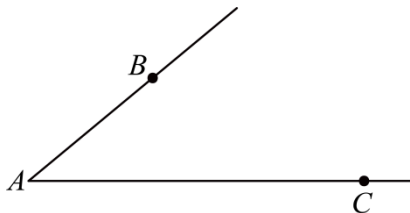
(1) 求 k, b, c 的值;

(2) 画出函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 与函数 $y = -kx + c$ 的图象;

(3) 求两直线与 x 轴围成的三角形的面积.

19. 尺规作图.

如图, 点 B, C 分别为 $\angle A$ 两边上的点, 请用直尺和圆规作经过点 A 的直线, 使得点 B, C 到这条直线的距离相等.

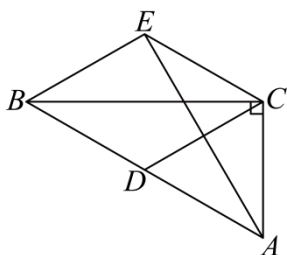


(1) 作线段 BC 的中点 O , 作直线 AO ; 并证明直线 AO 符合题意;

(2) 作不同于 (1) 的另一条符合题意的直线 AM (保留作图痕迹, 不写作法, 不必证明).

20. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 为 AB 中点, 连接 CD , 过点 B 作 $BE \parallel CD$,

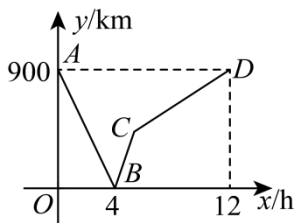
$BE = \frac{1}{2}AB$, 连接 CE, AE .



(1) 求证：四边形 $BDCE$ 是菱形；

(2) 若 AE 平分 $\angle BAC$ ， $AE = 6$ ，求四边形 $ABEC$ 的周长.

21. 一列快车从甲地驶往乙地，一列慢车从乙地驶往甲地，两车同时出发，设慢车行驶的时间为 $x(\text{h})$ ，两车之间的距离为 $y(\text{km})$ ，图中的折线表示 y 与 x 之间的函数关系.



根据图象回答问题：

信息读取：

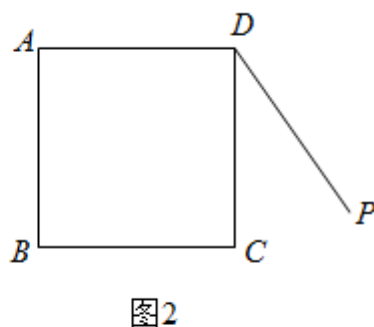
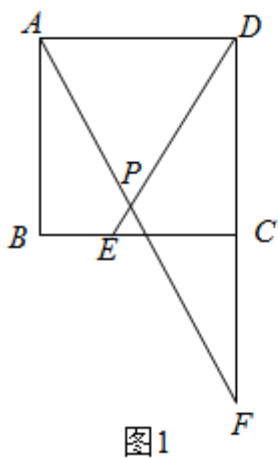
- (1) 甲、乙两地之间的距离为 _____ km ；
- (2) 请解释图中点 B ，点 C 和点 D 的实际意义；

图象理解：

- (3) 求慢车和快车的速度；
- (4) 直接写出线段 BC 所表示的 y 与 x 之间的函数解析式并写出自变量 x 的取值范围.

22. 在正方形 $ABCD$ 中，将线段 DA 绕点 D 旋转得到线段 DP （不与 BC 平行），直线 DP 与直线 BC 相交于点 E ，直线 AP 与直线 DC 相交于点 F .

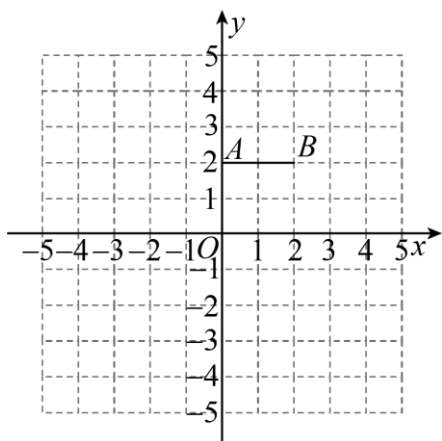
- (1) 如图 1，当点 P 在正方形内部，且 $\angle ADP = 60^\circ$ 时，求证： $DE + CE = DF$ ；
- (2) 当线段 DP 运动到图 2 位置时，依题意补全图 2，用等式表示线段 DE ， CE ， DF 之间的数量关系，并证明.



四、附加题（5分）

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0, 2)$ ， $B(2, 2)$ ，对于直线 l 和点 P ，给出如下定义：若在线段

AB 上存在点 Q ，使得点 P ， Q 关于直线 l 对称，则称直线 l 为点 P 的关联直线，点 P 是直线 l 的关联点。



- (1) 已知直线 $l_1: y = -x$ ，在点 $P_1(-2, 1)$ ， $P_2(-2, -1)$ ， $P_3(2, 0)$ 中，直线 l_1 的关联点是_____；
- (2) 若在 x 轴上存在点 P ，使得点 P 为直线 $l_2: y = -x + b$ 的关联点，求 b 的取值范围；
- (3) 已知点 $N(n, -n)$ ，若存在直线 $l_3: y = mx$ 是点 N 的关联直线，直接写出 n 的取值范围。

参考答案

一、选择题（共 24 分，每题 3 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	B	C	A	A	A	C

二、填空题（共 24 分，每题 3 分）

9. 【答案】解：∵ $\frac{\sqrt{x+7}}{x-3}$ 有意义，

$$\therefore \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases},$$

解得 $x \geq -7$ 且 $x \neq 3$,

故答案为： $x \geq -7$ 且 $x \neq 3$.

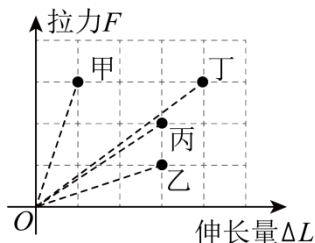
10. 【答案】解：∵ 所求一次函数的图象与直线 $y = -2x$ 平行，

∴ 设该一次函数解析式为 $y = -2x + b$,

∵ 一次函数图象不经过第一象限， $k = -2 < 0$,

∴ $b \leq 0$ ，可取 $b = -1$ ，可得一次函数解析式为 $y = -2x - 1$.

11. 【答案】解：如图，作出辅助线，



根据题意，设 $F = k\Delta L$,

则拉力 F 是关于伸长量 ΔL 的正比例函数，

由图象可知 $k > 0$ ，且图象越陡， k 越大，

所以弹性系数最大的是甲.

12. 【答案】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AD = 8$,

∴ $BC = 8$,

∵ $\triangle AEF$ 是 $\triangle AEB$ 翻折而成，

∴ $BE = EF = 3$, $AB = AF$,

∴ $CE = 8 - 3 = 5$,

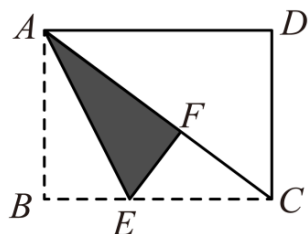
在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, $CF = \sqrt{CE^2 - EF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

设 $AB = x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, 即 $(x+4)^2 = x^2 + 8^2$,

解得 $x = 6$, 则 $AB = 6$.

故答案为: 6.



13. 【答案】解: $\because$ 在 $y = kx + 2 (k < 0, b = 2 > 0)$ 中, $k < 0, b = 2 > 0$,

$\therefore$ 一次函数图象一定经过第一、二、四象限,

$\therefore$ 其图象不可能经过 Q 点.

14. 【答案】解: 如图所示, 连接 DE ,

$\because$ 四边形 $AEFG$ 是矩形,

$\therefore AE \perp EF$,

$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot EF$,

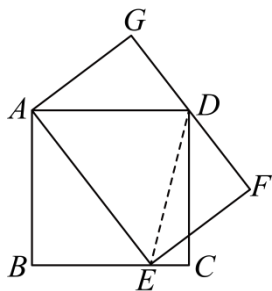
$\because S_{\text{矩形}AEFG} = AE \cdot EF$,

$\therefore S_{\text{矩形}AEFG} = 2S_{\triangle ADE}$

同理可得 $S_{\text{正方形}ABCD} = 2S_{\triangle ADE}$,

$\therefore S_{\text{矩形}AEFG} = S_{\text{正方形}ABCD} = 2 \times 2 = 4$,

故答案为: 4 .



15. 【答案】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AC \perp BD, OA = OC, OB = OD, AB = BC = CD = DA = 10,$$

$$\because S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 60,$$

$$\therefore AC \cdot BD = 120,$$

$$\therefore BO \cdot OC = 30.$$

$$\because BO^2 + CO^2 = BC^2 = 100,$$

$$\therefore (BO + OC)^2 - 2BO \cdot CO = 100,$$

$$\therefore BO + CO = 4\sqrt{10} \quad (\text{负值已舍去}),$$

$$\therefore BO = 4\sqrt{10} - OC,$$

$$\therefore BO^2 + CO^2 = 10^2,$$

$$\therefore (4\sqrt{10} - OC)^2 + CO^2 = 100,$$

$$\therefore CO = \sqrt{10}, CO = 3\sqrt{10} \quad (\text{舍去}).$$

$$\because AE \perp BC, AO = CO,$$

$$\therefore EO = CO = \sqrt{10}.$$

故答案为: $\sqrt{10}$.

16. 【答案】 ①. 6.875 ②. $12 \leq AE \leq 16$

【详解】解: (1) 设 $AE = x \text{ km}$, 则 $BE = AB - AE = (20 - x) \text{ km}$

$$\because DA \perp AB, CB \perp AB$$

$$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ$$

$$\text{在 Rt}\triangle DAE \text{ 中, 由勾股定理得 } DE^2 = DA^2 + AE^2 = 15^2 + x^2$$

$$\text{在 Rt}\triangle CBE \text{ 中, 由勾股定理得 } CE^2 = CB^2 + BE^2 = 10^2 + (20 - x)^2$$

$\because C, D$ 两村到加油站 E 的距离相等

$$\therefore DE = CE$$

$$\therefore DE^2 = CE^2$$

$$\therefore 15^2 + x^2 = 10^2 + (20 - x)^2$$

解得 $x = 6.875$

$$\therefore AE = 6.875\text{km} ;$$

$$(2) \text{ 由题意得 } S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2}(DA + CB) \cdot AB = \frac{1}{2} \times (15 + 10) \times 20 = 250(\text{km}^2),$$

$$S_{\triangle DAE} = \frac{1}{2} DA \cdot AE = \frac{1}{2} \times 15x = 7.5x(\text{km}^2),$$

$$S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2} CB \cdot BE = \frac{1}{2} \times 10(20 - x) = 100 - 5x(\text{km}^2)$$

$$\therefore S_{\triangle CDE} = S_{\text{梯形}ABCD} - S_{\triangle DAE} - S_{\triangle CBE}$$

$$= 250 - 7.5x - (100 - 5x)$$

$$= 150 - 2.5x(\text{km}^2)$$

$$\because \triangle CDE \text{ 的面积不小于 } 110\text{km}^2 \text{ 也不超过 } 120\text{km}^2$$

$$\therefore 110 \leq 150 - 2.5x \leq 120$$

$$\text{解得 } 12 \leq x \leq 16$$

$$\therefore AE \text{ 的取值范围是 } 12 \leq AE \leq 16.$$

三、解答题（共 52 分）

$$17. \text{【答案】}(1) 4 + \sqrt{6} \quad (2) 9 + 2\sqrt{5}$$

【小问 1 详解】

$$\text{解：原式} = \sqrt{48 \div 3} - \sqrt{\frac{1}{2} \times 12} + 2\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{16} - \sqrt{6} + 2\sqrt{6}$$

$$= 4 + \sqrt{6} ;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解：原式} = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 - [1 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2]$$

$$= 18 - 3 - (1 - 2\sqrt{5} + 5)$$

$$= 15 - 6 + 2\sqrt{5}$$

$$= 9 + 2\sqrt{5} .$$

$$18. \text{【答案】}(1) k = 1, b = -1, c = 3 \quad (2) \text{见解析} \quad (3) 1$$

【小问 1 详解】

解：∵直线 $l_1: y = kx + b$ ($k \neq 0$) 经过点 $A(2, 1)$ 和 $B(-1, -2)$,

$$\therefore \begin{cases} 2k + b = 1 \\ -k + b = -2 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} k = 1 \\ b = -1 \end{cases}$,

∵另一条直线 $y = -kx + c$ 也经过点 $A(2, 1)$,

$$\therefore 1 = -2 + c, \text{ 解得: } c = 3;$$

【小问 2 详解】

解：由 (1) 得：两函数解析式分别为 $y = x - 1$ 和 $y = -x + 3$,

对于 $y = x - 1$,

当 $y = 0$ 时, $x = 1$,

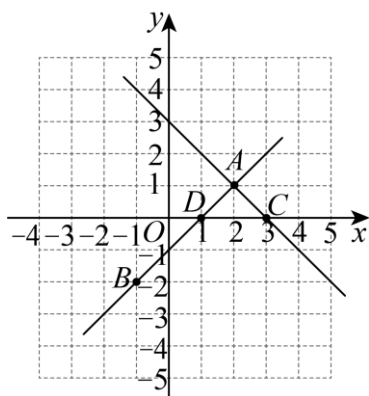
∴函数 $y = x - 1$ 的图象过点 $D(1, 0)$,

对于 $y = -x + 3$,

当 $y = 0$ 时, $x = 3$,

∴函数 $y = -x + 3$ 的图象过点 $C(3, 0)$,

画出函数图象, 如图:



【小问 3 详解】

解：由 (2) 得:

两直线与 x 轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}CD \times y_A = \frac{1}{2} \times (3 - 1) \times 1 = 1$.

19. **【答案】**(1) 作图见解析, 证明见解析 (2) 作图见解析

【小问 1 详解】

解：如图所示；点 O 即为 BC 的中点，直线 AO 即为所求作；

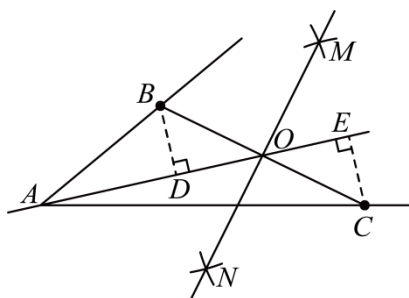
证明：作 $BD \perp AO$ 于点 D ，作 $CE \perp AO$ 于点 E ，

$$\because \angle BOD = \angle COE, \angle BDO = \angle CEO = 90^\circ, BO = CO,$$

$$\therefore \triangle BOD \cong \triangle COE (AAS),$$

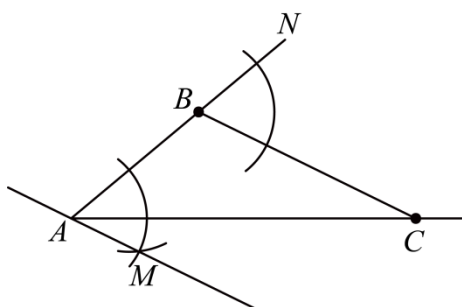
$$\therefore BD = CE,$$

$\therefore$ 点 B, C 到直线 AO 的距离相等；



【小问 2 详解】

解：如图所示，直线 AM 即为所求作；



20. 【答案】(1) 见解析 (2) $10\sqrt{3}$

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 为 AB 中点，

$$\therefore CD = BD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\because BE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore BE = CD,$$

$$\because BE \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $BDCE$ 是平行四边形，

$$\because CD = BD,$$

$\therefore$ 四边形 $BDCE$ 是菱形；

【小问 2 详解】

∵ 四边形 $BDCE$ 是菱形,

$$\therefore AB \parallel CE, BE = CE = BD,$$

$$\therefore \angle CEA = \angle BAE,$$

∵ AE 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAE = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle CEA = \angle CAE,$$

$$\therefore CE = AC,$$

∵ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 为 AB 中点,

$$\therefore BD = AD = CD = AC = \frac{1}{2} AB,$$

∵ AE 平分 $\angle BAC$, $AD = AC$,

$$\therefore CD \perp AE,$$

$$\therefore BE \parallel CD,$$

$$\therefore BE \perp AE, \text{ 即 } \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore BE^2 + AE^2 = AB^2,$$

$$\therefore BE^2 + 6^2 = (2BE)^2,$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = 4\sqrt{3}, CE = AC = BE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{四边形 } ABEC \text{ 的周长 } AB + BE + CE + AC = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

21. 【答案】(1) 900 (2) 点 B 表示两车相遇, 点 C 表示快车到达乙地, 点 D 表示慢车到达甲地

(3) 慢车速度为 75km/h , 快车速度为 150km/h

$$(4) y = 225x - 900, 4 \leq x \leq 6$$

【小问 1 详解】

解: 由图象可知, 当 $x = 0$ 时, $y = 900$,

∴ 甲、乙两地之间的距离为 900km .

【小问 2 详解】

解: 点 B : 两车相遇, 即两车行驶 4h 后相遇,

点 C : 快车到达乙地, 即快车行驶 6h 后到达乙地,

点 D ：慢车到达甲地，即慢车行驶12h 后到达甲地.

【小问 3 详解】

解：慢车速度 $= \frac{900}{12} = 75 \text{ km/h}$,

设快车速度为 $v \text{ km/h}$,

$\therefore$ 两车 4h 相遇,

$$\therefore 4(v + 75) = 900,$$

解得 $v = 150$,

$\therefore$ 慢车速度为 75 km/h ，快车速度为 150 km/h .

【小问 4 详解】

解：快车到达乙地所需时间 $= \frac{900}{150} = 6 \text{ h}$,

此时慢车行驶路程 $= 75 \times 6 = 450 \text{ km}$,

$\therefore$ 点 C 坐标为 $(6, 450)$,

设线段 BC 的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

将 $B(4, 0)$, $C(6, 450)$ 代入:

$$\begin{cases} 4k + b = 0 \\ 6k + b = 450 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 225 \\ b = -900 \end{cases},$$

$$\therefore y = 225x - 900, \quad 4 \leq x \leq 6.$$

22. 【答案】(1) 见解析; (2) 图见解析, $DE - CE = DF$, 证明见解析

【详解】(1) 证明: 设 $AB = a$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AD = CD = a, \quad \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore DA = DP, \quad \angle ADP = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle APD$ 是等边三角形.

$$\therefore \angle PAD = \angle ADP = 60^\circ,$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ADF$ 中,

$$DF = \tan \angle ADP \cdot AD = \tan 60^\circ \cdot a = \sqrt{3}a,$$

在 $Rt\triangle DCE$ 中,

$$\because \angle CDE = \angle ADC - \angle CDE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

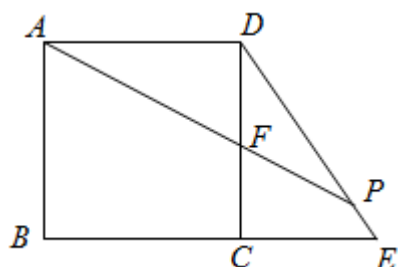
$$\therefore CE = \tan \angle CDE \cdot CD = \tan 30^\circ \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$DE = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore DE + CE = \frac{2\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{3}a = \sqrt{3}a,$$

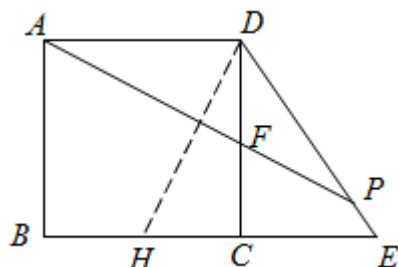
$$\therefore DE + CE = DF.$$

(2) 依题意补全图形, 如图所示.



$$DE - CE = DF.$$

证明: 作 $DH \perp AP$ 交 BC 于点 H .



$$\because DH \perp AF,$$

$$\therefore \angle HDC + \angle AFD = 90^\circ.$$

$$\because \angle HDC + \angle DHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle DHC.$$

$$\because AD = DC, \angle ADF = \angle DCH = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle DCH.$$

$$\therefore DF = CH.$$

$$\because DA = DP, DH \perp AP,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle EDH.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle EHD.$$

$$\therefore \angle EDH = \angle EHD.$$

$$\therefore DE = EH.$$

$$\because EH - EC = CH,$$

$$\therefore DE - CE = DF.$$

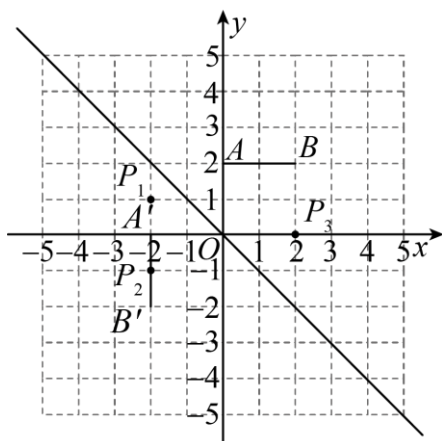
【点睛】本题主要考查正方形的性质，全等三角形的性质与判定，勾股定理以及解直角三角形等，解题的关键是学会添加常用辅助线来解决问题.

四、附加题（5分）

23. 【答案】(1) P_2 ; (2) $0 \leq b \leq 2$; (3) $-2 \leq n \leq -\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2} \leq n \leq 2$.

【小问1详解】

解：如图，线段 AB 关于直线 $l_1: y = -x$ 对称的线段 $A'B'$ ，点 $P_2(-2, -1)$ 在 $A'B'$ 上，故直线 l_1 的关联点是 $P_2(-2, -1)$ ；

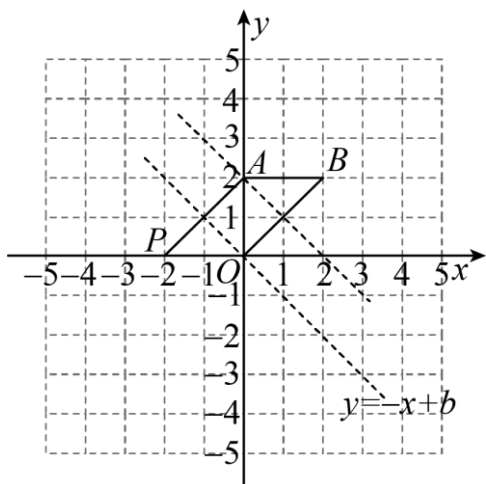


【小问2详解】

解：如图，由题意知，点 Q 在线段 AB 上，

$\because$ 点 P 为直线 l_2 的关联点，

$\therefore$ 点 P 关于直线 l_2 的对称点为 Q ，



当点 Q 与点 A 重合时，点 P 的坐标为 $(-2, 0)$ ，

$\triangle AOP$ 是等腰直角三角形，直线 l_2 经过原点，此时 $b=0$ ；

当点 Q 与点 B 重合时，点 P 的坐标为 $(0, 0)$ ，

$\triangle ABO$ 是等腰直角三角形，直线 l_2 经过点 A ，此时 $b=2$ 。

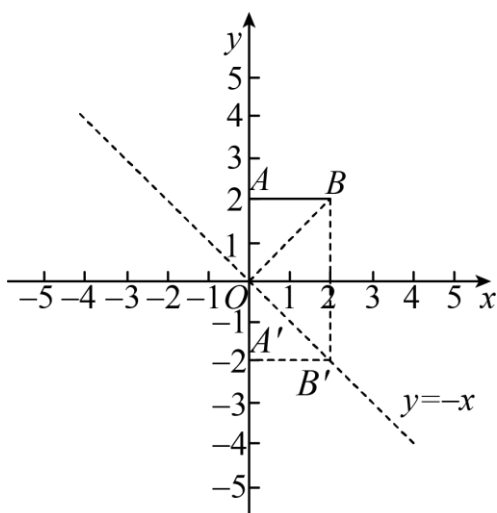
综上所述， b 的取值范围是 $0 \leq b \leq 2$ 。

【小问 3 详解】

解：如图，点 $N(n, -n)$ 在直线 $y = -x$ 上，设线段 AB 关于 $y = mx$ 的对称线段为 $A'B'$ ，

当直线 $l_3: y = mx$ 为 $y = 0$ 时，点 $A(0, 2)$ ， $B(2, 2)$ 关于直线 $y = 0$ 的对称点 $A'(0, -2)$ ， $B'(2, -2)$ ，此

时，点 $(2, -2)$ 为满足题意的点 N ， $n = 2$ ；



随着 m 增大，当 $y = mx$ 在第一、三象限内，存在如下图情况，点 A' 落在 $y = -x$ 上， B' 落在 x 轴上，连

接 OB ，由对称知， $\triangle OAB \cong \triangle OA'B'$ ， $\triangle OBC \cong \triangle OB'C$

$$\therefore OA' = OA = 2$$

过点 A 作 $A'D \perp y$ 轴，垂足为 D ， $\text{Rt}\triangle DOA'$ 中， $\angle DOA' = \angle DA'O = 45^\circ$

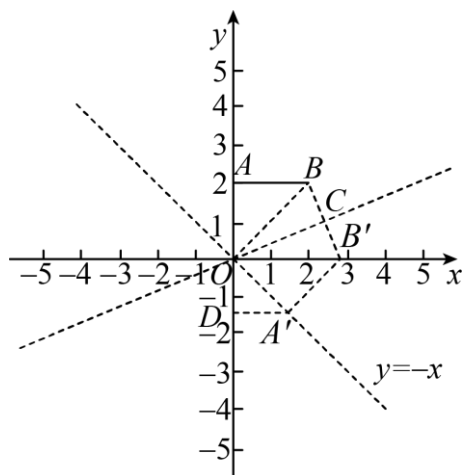
$$\therefore DO = DA'$$

$$\because DO^2 + A'D^2 = A'O^2 = 4$$

$$\therefore DO = DA' = \sqrt{2},$$

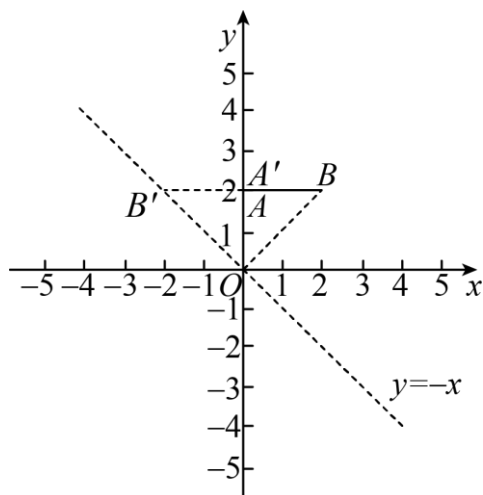
$$\therefore \text{点 } A'(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

此时， $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 为满足题意的点 N ， $n = \sqrt{2}$

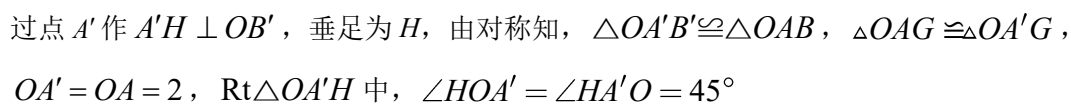


故 $\sqrt{2} \leq n \leq 2$ 时，存在直线 $l_3: y = mx$ 是点 $N(n, -n)$ 的关联直线；

如图，线段 AB 与 $A'B'$ 关于 y 轴对称， $B'(-2, 2)$ ，此时 $(-2, 2)$ 为满足题意的点 N ， $n = -2$ ；



如图，当直线 $y = mx$ 在第二、四象限，存在如下图情况，点 A' 在直线 $y = -x$ 上，点 B' 在 x 轴上，



$$\therefore HO = HA' = \sqrt{2}$$

此时 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 为满足题意的点 N , $n = -\sqrt{2}$

故 $-2 \leq n \leq -\sqrt{2}$ 时, 存在直线 $l_3: y = mx$ 是点 $N(n, -n)$ 的关联直线;

综上, 若存在直线 $l_3: y = mx$ 是点 $N(n, -n)$ 的关联直线, 则 $-2 \leq n \leq -\sqrt{2}$, 或 $\sqrt{2} \leq n \leq 2$.